Theoretische Grundlagen 1

Prüfung im Wintersemester 2003/04

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Hochschule Reutlingen - Reutlingen University

Fachbereich:	Informatik
Bachelor-Studiengang/Semester:	Medien- und Kommunikationsinformatik 1
Prüfer:	Prof. Dr. Karlheinz Hug
Prüfungstermin (Datum, Uhrzeit) und Ort:	Do 29. 1. 2004, 10^{30}-12^{30} Uhr, Aula
Prüfungsdauer:	120 Minuten
Zugelassene Hilfsmittel:	Alle (Vorlesungsmitschrift, Literatur,...)
Anzahl der Aufgabenseiten:	10

Aufgabe	**Punkte**		**Aufgabe**	**Punkte**	
	möglich	**erreicht**		**möglich**	**erreicht**
1	12		6	14	
2	14		7	18	
3	14		8	16	
4	20		9	16	
5	8		10	16	
Summe möglich:		**148**	**Summe erreicht:**		

- Zum Bestehen der Prüfung sind 60, für die Note „Eins“ 120 Punkte erforderlich.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben möglichst auf dazu freigelassenen Stellen im Text!
- Teilaufgaben sind meist unabhängig voneinander lösbar.

✌ **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1: Mengenformeln (Punkte: 12 |..........)

L, M, N sind Teilmengen einer Grundmenge G. Geben Sie jeweils die bei jedem Schritt verwendeten Rechenregeln an!

(1) Transformieren Sie die folgende Formel algebraisch in ca. fünf Schritten in eine möglichst einfache äquivalente Formel!

$(L \cup M) \cap L \subseteq ((N \cup \overline{M}) \setminus (M \cap \overline{L})) \cup N$ benutzte Regeln

$\equiv$

(2) Beweisen Sie die folgende Gleichung algebraisch in ca. fünf Schritten!

$((L \cup M) \setminus N) \cup (L \cap N) = L \cup (M \setminus N)$. benutzte Regeln

Beweis. $((L \cup M) \setminus N) \cup (L \cap N) =$

Aufgabe 2: Produktmengen (Punkte: 14 |..........)

I und M_i, N_i für $i \in I$ sind nicht leere Mengen.

(1) Beweisen Sie die folgende Mengengleichung in ca. fünf Schritten, indem Sie eine prädikatenlogsiche Rechenregel nutzen!

$$\prod_{i \in I} M_i \cap \prod_{i \in I} N_i = \prod_{i \in I} (M_i \cap N_i) .$$

Beweis. $(x_i) \in \Pi M_i \cap \Pi N_i \Leftrightarrow$

(2) Zeigen Sie anschaulich mit zwei Skizzen (für jede Seite eine), warum in der folgenden Gleichung *nicht* „=“ gilt!

$$M_1 \times M_2 \cup N_1 \times N_2 \subseteq (M_1 \cup N_1) \times (M_2 \cup N_2).$$

(3) Verallgemeinern Sie die Formel von (2) auf eine beliebige Indexmenge I (statt $\{1, 2\}$) und markieren Sie im Beweis zu (1) die Stelle, die *nicht* analog gilt, mit $*$!

Aufgabe 3: Algebra der Aussagenlogik (Punkte: 14 |..........)

(1) Transformieren Sie die folgende Aussage schrittweise algebraisch in eine möglichst einfache logisch äquivalente Aussage!

$$(1 \Leftrightarrow x < 3) \wedge (x \leq 2 \vee x \geq 2) \wedge ((x < 3 \wedge x > 4) \Rightarrow y \geq 9)$$

$\equiv$

(2) Stellen Sie die folgende Aussage und ihre Negation jeweils in einer Normalform dar und geben Sie dazu die Art der Normalform an!

$$(\neg a <\!\!\neq\!\!> b) \wedge ((c \vee a) \Rightarrow b)$$

$\equiv$

Negation:

(3) Beweisen Sie algebraisch, dass die folgende Aussage allgemeingültig ist!

$$((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \wedge B)) \vee ((B \Rightarrow A) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B))$$

$\equiv$

Aufgabe 4: Logeleien (Punkte: 20 |..........)

(1) **Kriminalfall**: Der Kommissar weiß über drei Tatverdächtige A, B, C:

(a) Wenn A und B nicht beide beteiligt waren, dann ist C unschuldig.

(b) Ist B der Täter oder C unschuldig, so ist A unschuldig.

(c) Mindestens einer der drei Verdächtigen war Täter.

Finden Sie den Täter mit beliebigen Methoden in nachvollziehbaren Schritten!

(2) **Lügengeschichte**: Die Personen A, B, C behaupten über sich:

(a) A: „Wenn B lügt, dann sagt C die Wahrheit.“

(b) B: „Mindestens A oder C lügt, vielleicht sogar beide.“

(c) C: „Wenn A lügt, dann ist B ehrlich.“

Finden Sie in nachvollziehbaren Schritten (Tipp: mittels Einsetzmethode) heraus, wer lügt und wer die Wahrheit sagt!

Aufgabe 5: Wahrheitstabelle und Normalformen (Punkte: 8 |..........)

a	b	c	$A(a, b, c)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Geben Sie zu dieser Wahrheitstabelle je eine kanonische DNF und KNF und je eine andere, möglichst minimale Normalform an!

KDNF:

DNF:

KKNF:

KNF:

Aufgabe 6: Beweise mit etwas Prädikatenlogik (Punkte: 14 |..........)

Die axiomatische Mengenlehre kennt das Klassenbildungsaxiom

$$\exists M\ \forall x : (x \in M \Leftrightarrow \boldsymbol{Mg}(x) \wedge P(x)).$$

(mit $\boldsymbol{Mg}(x)$ für „x ist eine Menge“). Verbalisieren Sie die folgenden zwei Sätze und nutzen Sie die Prädikate $P_1(x) = (x \in x \Leftrightarrow x \notin x)$ und $P_2(x) = x \notin x$ und die Ersetzung $x \mapsto M$ an geeigneter Stelle, um die Sätze aus dem Axiom abzuleiten!

(1) $\exists M\ \forall x : x \notin M.$

Verbal:

Beweis.

(2) $\exists M : (M \notin M \wedge \neg \boldsymbol{Mg}(M)).$

Verbal:

Beweis.

Aufgabe 7: Prädikatenlogische Formeln (Punkte: 18 |..........)

Geben Sie zur folgenden prädikatenlogischen Formel alle *echten* Teilformeln und dazu jeweils die syntaktischen Eigenschaften der Variablen (frei, gebunden) sowie alle Teilterme an!

$$\forall x\, \exists y : (\forall z : P(x, f(z)) \Rightarrow Q(y)) \wedge (\exists x : R(g(x), y) \vee S(z)).$$

Echte Teilformeln: darin frei: gebunden:

Teilterme:

Bereinigen Sie die Formel!

Transformieren Sie die Formel in eine bereinigte Pränexform nur mit $\neg$, $\wedge$, $\vee$!

Negieren Sie die Formel und bringen Sie alle Negationen möglichst weit nach innen!

Aufgabe 8: Aussagen formalisieren (Punkte: 16 |..........)

Stellen Sie die Sätze prädikatenlogisch mit geeigneten Prädikaten und Funktionen dar!

(1) Alle Räder sind rund.

(2) Was rund und geölt ist, rollt gut.

(3) Es gibt ein Rad, das nicht gut rollt.

(4) Das Vorderrad und das Hinterrad eines Fahrrads rollen richtungsgleich.

(5) Genau das, was genau zwei Räder hat, ist ein Fahrrad.

Aufgabe 9: Induktive Definitionen (Punkte: 16 |..........)

(1) Die Sprache S über dem Alphabet $\{0, 1, +, *, (,)\}$ ist induktiv definiert durch:

atomare Wörter: $0, 1 \in S$.

zusammengesetzte Wörter: $a, b \in S \Rightarrow (a + b), (a * b) \in S$.

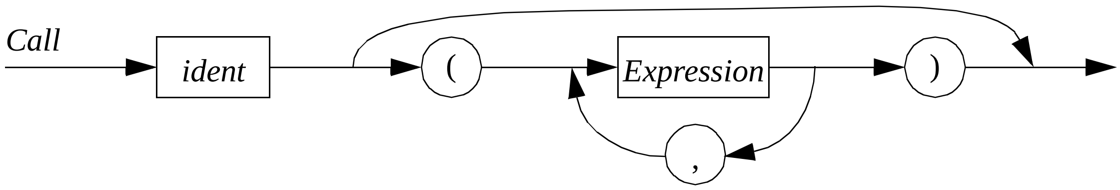
Geben Sie ein Wort aus S an, das mindestens 15 Zeichen lang ist!

Geben Sie zwei EBNF-Regeln an, die S beschreiben (eindeutige Zerlegbarkeit von Wörtern ist *nicht* gefordert)!

(2) Das Alphabet $\{0, 1, \in, \neg, \wedge, \forall, (,), :\} \cup Va$ mit $Va = \{a,.., z\}$ reicht, um die Mathematik formal darzustellen. Definieren Sie die Syntax der Sprache M der mathematischen Formeln induktiv so, dass sie zu üblichen Formeln passt!

Aufgabe 10: Syntaxbeschreibungen (Punkte: 16 |..........)

(1) Stellen Sie das folgende Syntaxdiagramm mit einer EBNF-Regel dar!



Call =

(2) Gegeben ist die vereinfachte Syntax einer Internetadresse in EBNF-Notation:

URL = *Protocol* „`://`“ *Hostname* [„`/`“ *Pathname*].

Protocol = „`file`“ | „`ftp`“ | „`http`“.

Hostname = *ident* „`.`“ („`de`“ | „`com`“).

Pathname = *ident* { „`/`“ *ident* }.

(lexikalische Einheit: *ident* = *letter* { *letter* | *digit* | „`.`“ | „`-`“ }.)

Zeichnen Sie zu den ersten vier dieser Regeln äquivalente Syntaxdiagramme!

Zeichnen Sie zum folgenden Wort den konkreten Syntax-Zerteilungsbaum (ohne *ident* in einzelne Zeichen zu zerteilen)!

`http://www-mki.fh-reutlingen.de/b1/tg1.htm`