Theoretische Grundlagen 2

Prüfung im Sommersemester 2004

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Hochschule Reutlingen - Reutlingen University

Fachbereich:	Informatik
Bachelor-Studiengang/Semester:	Medien- und Kommunikationsinformatik 2
Prüfer:	Prof. Dr. Karlheinz Hug
Prüfungstermin (Datum, Uhrzeit) und Ort:	Fr 9. 7. 2004, 10^{30}-12^{30} Uhr, Aula
Prüfungsdauer:	120 Minuten
Zugelassene Hilfsmittel:	Alle (Vorlesungsmitschrift, Literatur,...)
Anzahl der Aufgabenseiten:	10

Aufgabe	**Punkte**		**Aufgabe**	**Punkte**	
	möglich	**erreicht**		**möglich**	**erreicht**
1	32		6	14	
2	10		7	10	
3	12		8	17	
4	18		9	20	
5	15				
Summe möglich:		**148**	**Summe erreicht:**		

- Zum Bestehen der Prüfung sind 60, für die Note „Eins“ 120 Punkte erforderlich.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben möglichst auf dazu freigelassenen Stellen im Text!
- Teilaufgaben sind meist unabhängig voneinander lösbar.
- Geben Sie alle Aufgaben- und Lösungsblätter ab!

✌ **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1: Relation, Eigenschaften, Zugeordnetes (Punkte: 32 |..........)

Gegeben sind die Menge $M = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ und die Relation $R = \{(a, b), (a, d), (b, b), (c, d), (d, e), (e, f), (f, d), (g, g), (g, h)\} \subseteq M^2$.

Zeichnen Sie ein **Pfeildiagramm** zu *R*!

Begründen Sie, warum *R* folgende Eigenschaften *nicht* hat!

Eigenschaft	**fehlt, weil...**
linkstotal	
rechtstotal	
linkseindeutig	
rechtseindeutig	
reflexiv	
irreflexiv	
symmetrisch	
linear (konnex)	
transitiv	
azyklisch	

Geben Sie die Mengen an!

Nachbereich $_aR$ = ...; **Vorbereich** R_d = ...

Geben Sie die **Umkehrrelation** und **Kompositionsprodukte** von *R* an!

R^{-1}	$R^0 = \mathrm{id}_M$	$R^1 = R$	R^2	R^3
		(a, b), (a, d), (b, b), (c, d), (d, e), (e, f), (f, d), (g, g), (g, h)		

Die kleinste R umfassende Äquivalenzrelation auf M hat .... (**Anzahl**) Äquivalenzklassen.

Die reflexive und transitive Hülle von R ist eine Präordnung Q, die eine Äquivalenzrelation $\approx_Q$ auf M induziert. Die **Äquivalenzklassen** von $\approx_Q$ sind:

....

Zeichnen Sie ein **Ordnungsdiagramm** zu der durch Q induzierten Halbordnung $\leq_Q$ auf $M / \approx_Q$!

Eine mit $\leq_Q$ verträgliche **Vollordnung** auf $M / \approx_Q$ ist:

....

Aufgabe 2: Eigenschaften von Abbildungen (Punkte: 10 |..........)

Für eine endliche Menge M und eine Abbildung $f : M \to M$ gilt:

f ist surjektiv $\Leftrightarrow$ f ist injektiv $\Leftrightarrow$ f ist bijektiv.

Beweis.

Die Abbildung $g : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}, p \mapsto 2p$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.

Beweis.

Die Abbildung $h : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}, p \mapsto p \text{ div } 2$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.

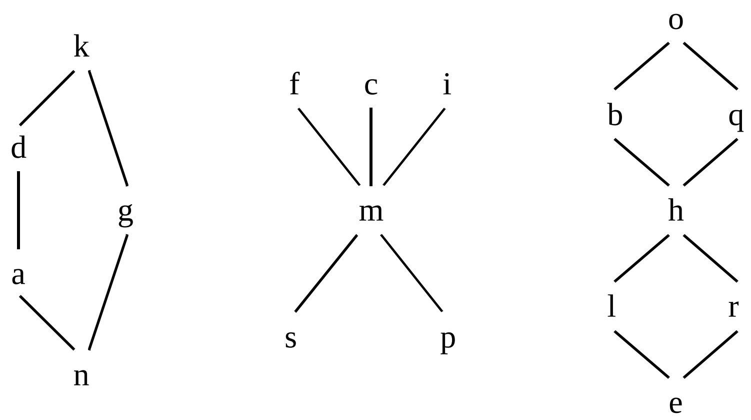
Beweis.

Aufgabe 3: Ordnungsrelation, Ketten, Antiketten (Punkte: 12 |..........)

Der **Satz von Dilworth** setzt eine endliche halbgeordnete Menge $\langle G, \leq\rangle$ voraus.

(1) Die minimale Mächtigkeit einer Zerlegung von G in Ketten ist gleich der maximalen Mächtigkeit einer Antikette in G.

Veranschaulichen Sie diese Aussage, indem Sie zu dem Ordnungsdiagramm angeben:



Eine **Zerlegung in** möglichst wenige **Ketten**: Mächtigkeit:

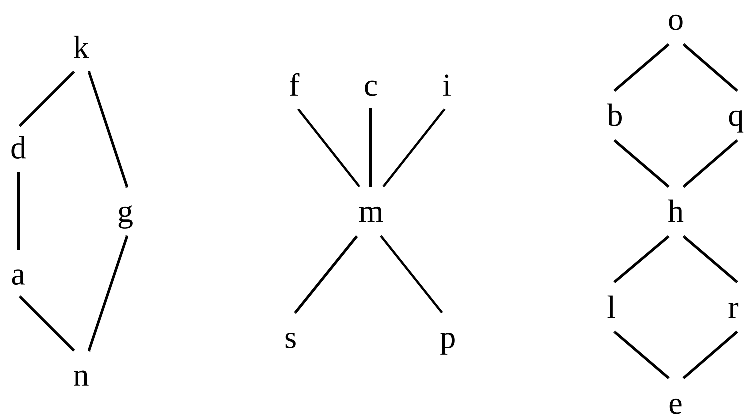
....

Eine möglichst große **Antikette**: Mächtigkeit:

....

(1) Die minimale Mächtigkeit einer Zerlegung von G in Antiketten ist gleich der maximalen Mächtigkeit einer Kette in G.

Veranschaulichen Sie diese Aussage, indem Sie zu dem Ordnungsdiagramm angeben:



Eine **Zerlegung in** möglichst wenige **Antiketten**: Mächtigkeit:

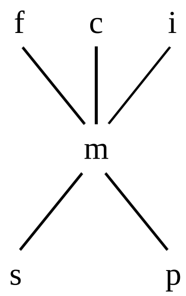
....

Eine möglichst lange **Kette**: Mächtigkeit:

....

Aufgabe 4: Ordnungsrelation, Bereiche, Extrema (Punkte: 18 |..........)

Markieren Sie die (a) **minimalen**, (b) **maximalen Elemente** im Ordnungsdiagramm:



Geben Sie die Mengen an!

Nachbereich ${}_s{\le}$ = ...;

Vorbereich $\le_f$ = ...;

Intervall $[p, c]_\le = {}_p{\le} \cap \le_c$ = ...

Verfolgen Sie den **Ablauf des Algorithmus**

```
min(M) =
    result := ∅;
    L := M;
    WHILE L ≠ ∅ DO                          ASSERT result ⊂ min(M) ⊆ result ∪ L;
        x := ein z ∈ L;
        N := L \ {x};
        WHILE N ≠ ∅ DO
            y := ein z ∈ N;
            IF x < y THEN                   ASSERT y ∉ min(M);
                L := L \ {y}
            ELSIF y < x THEN                ASSERT x ∉ min(M);
                L := L \ {x};
                x := y;
                N := L
            END;
            N := N \ {y}
        END;
        result := result ∪ {x};
        L := L \ {x};                       ASSERT result ⊆ min(M) ⊆ result ∪ L
    END;                                    ASSERT L = ∅ ∧ result = min(M).
```

mit der nach obigem Diagramm geordneten Menge $M = \{c, f, i, m, p, s\}$ als Eingabe, wobei aus einer Menge stets das alphabetisch kleinste Element zu wählen ist!

M	result	L	x	N	y
c f i m p s					

Aufgabe 5: Ein Fixpunktsatz (Punkte: 15 |..........)

Ist G eine Menge und $f : \mathcal{P}(G) \to \mathcal{P}(G)$ ein isotoner Ordnungshomomorphismus, d.h. gilt

$$\forall M, N \subseteq G : (M \subseteq N \;\Rightarrow\; f(M) \subseteq f(N)),$$

so hat f mindestens einen **Fixpunkt**, d.h. es gilt

$$\exists F \subseteq G : f(F) = F.$$

Beweis. Wir setzen

$$\mathcal{F} := \{M \subseteq G \mid M \subseteq f(M)\}, \qquad F := \bigcup \mathcal{F}$$

und zeigen, dass F ein Fixpunkt ist, so:

(1) $F \subseteq f(F)$.

(2) $f(F) \subseteq F$.

Um (1) zu zeigen, sei $x \in F$ beliebig gewählt. Zeigen Sie: $x \in f(F)$!

Um (2) zu zeigen, verwenden Sie (1) und die Isotonie von f!

Aufgabe 6: Vollständige Induktion (Punkte: 14 |..........)

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion nach n:

(1) $\forall n \in \boldsymbol{N}_0 \ \forall x \in \boldsymbol{R}$ mit $x > -1 : (1+x)^n \geq 1 + nx$.

Beweis.

(2) $\forall n \in \boldsymbol{N}_0 : \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Beweis.

Aufgabe 7: Rekursion (Punkte: 10 |..........)

Berechnen Sie zu

(1) den Funktionen *even*, *odd* : $\mathbf{Z} \rightarrow \{0, 1\}$,

$$even(p) = \begin{cases} even(-p) & \text{falls } p < 0 \\ 1 & \text{falls } p = 0, \\ odd(p-1) & \text{falls } p > 0 \end{cases}$$

$$odd(p) = \begin{cases} odd(-p) & \text{falls } p < 0 \\ 0 & \text{falls } p = 0 \\ even(p-1) & \text{falls } p > 0 \end{cases}$$

in einer **Gleichungskette**:

$even(-4) =$

(2) der Funktion $f : \mathbf{N}_0 \rightarrow \mathbf{N}_0$

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ 1 & \text{falls } n = 1, \\ f(n-1) + f(n-2) & \text{falls } n > 1 \end{cases}$$

mit einem **Aufrufbaum**:

$f(5)$

Aufgabe 8: Teiltrelation (Punkte: 17 |..........)

Die durch

$$m \mid n \quad :\Leftrightarrow \quad \exists k \in \boldsymbol{N}_0 : k * m = n$$

für $m, n \in \boldsymbol{N}_0$ definierte **Teiltrelation** ist eine Halbordnung auf $\boldsymbol{N}_0$.

Beweis.

Zeichnen Sie das **Ordnungsdiagramm** zu {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 12, 15, 35, 60, 420} bzgl. der Teiltrelation!

Aufgabe 9: Kongruenz, Restklassen (Punkte: 20 |..........)

Die zu $n \in \boldsymbol{N}_0$ durch

$$p \equiv_n q \quad :\Leftrightarrow \quad n \mid p - q$$

für $p, q \in \boldsymbol{Z}$ definierte **Kongruenz modulo *n*** ist eine Äquivalenzrelation auf $\boldsymbol{Z}$.

Beweis.

Wie zerlegen die **Äquivalenzklassen** (Restklassen) von $\equiv_4$ die Teilmenge

$\{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$?

Füllen Sie die **Multiplikationstabelle** zu $\boldsymbol{Z}_5 = \boldsymbol{Z} / \equiv_5$ aus!

$*_5$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0					
1					
2					
3					
4					